ГБПОУ НАО «Нарьян-Марский социально-гуманитарный колледж
имени И.П. Выучейского»

Методические указания и контрольные задания
для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения
по дисциплине **ЕН.01. Математика**

специальность 46.02.01 Документационное обеспечение управления и архивоведение

Нарьян-Мар
2023

Методические указания составлены в соответствии с рабочей программой по дисциплине ЕН.01. Математика по специальности 46.02.01 Документационное обеспечение управления и архивоведение

Составлены в соответствии с Федеральными государственными образовательными стандартами и к минимуму содержания и к уровню подготовки выпускника по специальности 46.02.01 Документационное обеспечение управления и архивоведение

Зам. директора по УР ____/ Авачёва Л.М./
«____ « _____ 20___ г.

Составитель: _____ /Н.В. Павлючук /

Согласовано:

Председатель ПЦК _____ /Н.В. Павлючук /
« 1» сентября 2023 г.

Введение

Изучение дисциплины «Математика» при подготовке специалистов документационного обеспечения управления ориентировано на достижение следующих целей:

- **формирование представлений** о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- **развитие** логического мышления, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;
- **овладение математическими знаниями и умениями,** необходимыми для изучения дисциплин профессионального цикла;
- **воспитание** средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

Курс включает изучение элементов математического анализа, состоит из двух разделов

- Дифференциальное исчисление
- Интегральное исчисление

Их изучение сопровождается совершенствованием интеллектуальных и речевых умений путем обогащения математического языка, развития логического мышления.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

уметь:

- Решать задачи на отыскание производной сложной функции, производных второго и высших порядков;
- Применять основные методы интегрирования при решении задач;
- Применять методы математического анализа при решении задач прикладного характера, в том числе профессиональной направленности;

знать:

- основные понятия и методы математического анализа;
- основные численные методы решения прикладных задач;

Изучение дисциплины «Математика» способствует формированию следующих общих компетенций (ОК):

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

По курсу предусмотрено выполнение одной контрольной работы.

Формой отчетности является зачет.

2. Тематический план и содержание учебной дисциплины «Математика»

Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала, лабораторные и практические работы, самостоятельная работа обучающихся	Объем часов
1	2	3
Раздел 1.	**Дифференциальное исчисление**	**53**
Тема 1.1. **Производная**	Содержание учебного материала	2
	Производная. Правила дифференцирования. Таблица производных. Производная сложной и обратной функции. Производные высших порядков.	
	Практическое занятие «Нахождение производной»	2
	Самостоятельная работа обучающихся: изучение теории, выполнение домашнего задания, выполнение контрольных заданий	23
Тема 1.2. **Применение производной**	Содержание учебного материала	2
	Дифференциал функции и его применение. Применения производной в исследовании функций на монотонность и экстремумы.	
	Практическое занятие «Применение дифференциала и производной»	2
	Самостоятельная работа обучающихся: изучение теории, выполнение домашнего задания, выполнение контрольных заданий	22
Раздел 2.	**Интегральное исчисление**	**52**
Тема 2.1. **Неопределен-ный интеграл и его приложения**	Содержание учебного материала	2
	Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов. Методы интегрирования. Применения неопределенного интеграла.	
	Практическое занятие «Неопределенный интеграл»	2
	Самостоятельная работа обучающихся: изучение теории, выполнение домашнего задания, выполнение контрольных заданий	22
Тема 2.2. **Определенный интеграл и его приложения**	Содержание учебного материала	2
	Определенный интеграл. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Методы интегрирования. Приложения.	
	Практическое занятие «Определенный интеграл и его приложения»	2
	Самостоятельная работа обучающихся: изучение теории, выполнение домашнего задания, выполнение контрольных заданий	22

3. Темы для самостоятельного изучения, вопросы для самоконтроля

Раздел I. Дифференциальное исчисление

1. Пусть дана функция $y = y(t)$, выражающая количество произведенной продукции y за время работы t. Найдем производительность труда в момент времени t_0.

За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ произведено $y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$ единиц продукции. Средняя производительность труда за этот период времени равна $\dfrac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t}$. Тогда производная

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t}=y'(t_0)$$

выражает *предельную производительность* труда в момент времени t_0.

Таким образом, *предельная производительность труда есть производная объема произведенной продукции по времени*.

2. Пусть x — количество выпускаемой продукции, y — соответствующие издержки на ее производство, т. е. функция $y = f(x)$ выражает зависимость себестоимости продукции y от ее объема x. Если объем продукции вырастет с x до $x+\Delta x$, то ее себестоимость вырастет на $y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$. Тогда $\dfrac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}$ — средняя себестоимость продукции, приходящаяся на единицу ее прироста. Производная

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}$$

выражает *предельные издержки производства* и характеризует дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.

Правила дифференцирования

$(u+v)'=u'+v'$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$(uv)'=u'v+uv'$	$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$
$(Cu)'=Cu'$	$(u(v))'=u'v'$
$(kx+b)'=k$	$C'=0$

Таблица производных

Функция $f(x)$	**Сложная функция** $(u(v))'=u'v'$
$x'=1$	
$\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1},\ \alpha\in\boldsymbol{R}$	$\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$
$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$
$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(tgu\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Пример 1. $f(x) = (ctgx)^5$. Найти $f'(x)$.

Решение. Функция $f(x)$ является сложной функцией функций $ctgx$ (внутренняя функция) и t^5 (t=ctgx - внешняя функция). Тогда по правилу дифференцирования сложной функции получаем:

$$f'(x) = (ctgx)' \cdot (t^5)'_{t=ctgx} = -\frac{1}{sin^2 x} \cdot 5t^4{}_{t=ctgx} = -\frac{5ctg^4 x}{sin^2 x} = -\frac{5cos^4 x}{sin^6 x}.$$

Пример 2. $f(x) = ctg(x^5)$. Найти $f'(x)$.

Решение. Функция $f(x)$является композицией функций x^5 (внутренняя функция) и $ctgt$ (внешняя функция). Тогда по правилу дифференцирования композиции получаем:

$$f'(x) = (x^5)' \cdot (ctgt)'_{t=x^5} = 5x^4 \cdot (-\frac{1}{sin^2 t})_{t=x^5} = -\frac{5x^4}{sin^2 x^5}.$$

Решение этого примера можно записать короче:

$$f'(x) = (x^5)' \cdot ctg'(x^5) = 5x^4 \cdot \frac{-1}{sin^2 x^5}.$$

Пример экономической задачи. Объем продукции y (усл. ед.) цеха в течение рабочего дня представляет функцию $y(t) = -\frac{5}{6}t^3 + 7t^2 + 75t + 50$, где t — время (ч). Найти производительность труда через 2 часа после начала работы.

Решение. Так как производительность труда есть производная объема произведенной продукции по времени, то надо найти производную данной функции в точке $t = 2$.

$$y'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 14t + 75,$$

$$y'(2) = -\frac{5}{2} \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 + 75 = 93 \text{ ед./ч.}$$

Ответ: 93 ед./ч.

Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема в интервале $(a; b)$. Тогда производная $f'(x)$ этой функции представляет собой функцию, также определенную в интервале $(a; b)$. Если эта функция $f'(x)$ имеет производную в некоторой точке $x_0 \in (a; b)$, то эта производная от $f'(x)$ называется *второй производной* (или *производной второго порядка*) функции $y = f(x)$ в точке x_0

$$f'' = (f')'$$

и обозначается одним из символов

$$f''(x_0),\ y''(x_0),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2f(x_0)}{dx^2},\ f^{(2)}(x_0).$$

Аналогично, если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в интервале $(a; b)$, то производная в точке x_0 от $f''(x)$ называется *третьей производной* (или *производной третьего порядка*) и обозначается

$$f'''(x_0),\ y'''(x_0),\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^3f(x_0)}{dx^3},\ f^{(3)}(x_0).$$

Если $(n-1)$-я производная имеет производную в точке x_0, то эта производная называется *n-й производной* (или *производной n-го порядка*) функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Обозначают n-ю производную:

$$f^{(n)}(x_0),\ y^{(n)}(x_0),\ \frac{d^ny}{dx^n},\ \frac{d^nf(x_0)}{dx^n}.$$

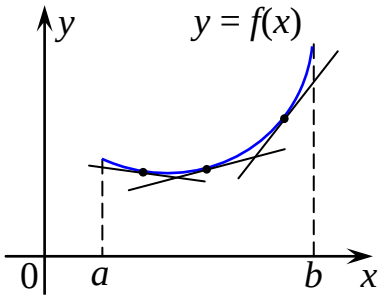
Функция, имеющая конечную производную n-го порядка в точке x_0, называется *n раз дифференцируемой* в этой точке. Функция, имеющая в точке x_0 производные всех порядков, называется *бесконечно дифференцируемой* в этой точке.

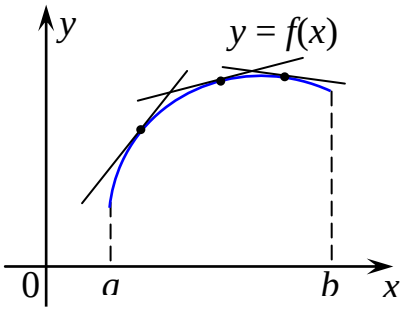
Применение производной к исследованию функции на монотонность (возрастание и убывание) и экстремумы смотрите в учебнике Ш.А. Алимова Алгебра и начала математического анализа 10-11 или в перечне рекомендуемых учебных изданий ниже.

Выпуклость функции. Точки перегиба

Функция $y = f(x)$ называется *вогнутой* (*выпуклой вниз*) на интервале $(a; b)$, если на этом интервале график функции расположен не ниже касательной, проведенной в любой точке этого интервала.

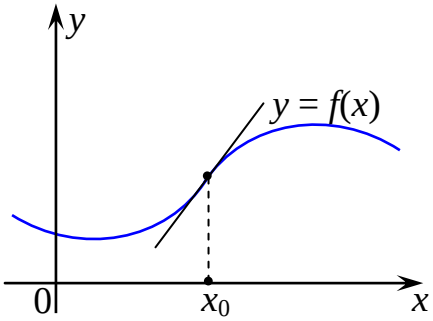
Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой* (*выпуклой вверх*) на интервале $(a; b)$, если на этом интервале график функции расположен не выше касательной, проведенной в любой точке этого интервала.





Достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции. Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$. Если на этом интервале $f''(x) > 0$, то функция вогнута, если $f''(x) < 0$, то функция выпукла.

Точка графика функции $y = f(x)$, при переходе через которую график меняет выпуклость на вогнутость, или наоборот, называется *точкой перегиба*. Если в точке перегиба к графику функции существует касательная, то график переходит в этой точке с одной стороны касательной на другую.



Необходимое условие существования точки перегиба. Если $M(x_0; f(x_0))$ — точка перегиба графика функции $y = f(x)$, то вторая производная $f''(x_0)$ равна нулю или не существует.

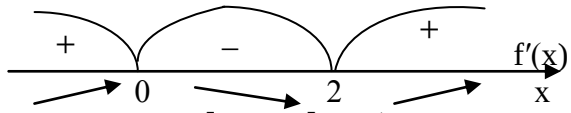
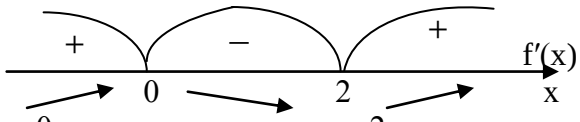
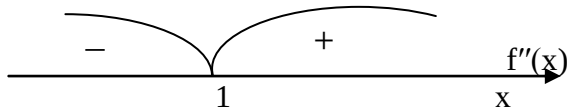
Достаточное условие существования точки перегиба. Пусть функция имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0 и $f''(x_0) = 0$. Если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $M(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба. Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 знака не меняет, то точка $M(x_0; f(x_0))$ не является точкой перегиба.

Схема исследования функции $y = f(x)$ на выпуклость и точки перегиба

1) Найти вторую производную функции $f''(x)$.
2) Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
3) Найденные точки разбивают область определения функции на интервалы, на каждом из которых вторая производная $f''(x)$ сохраняет знак. Определить знак производной на каждом из этих интервалов. Если $f''(x) > 0$ на рассматриваемом интервале, то функция вогнута; если $f''(x) < 0$, то выпукла.

4) Сравнить знаки производной слева и справа от каждой критической точки и, используя достаточное условие перегиба, сделать вывод о наличии точек перегиба функции.

Методические рекомендации по решению типовых задач по теме «Исследование функций с помощью производной»

Алгоритм исследования на монотонность 1) Найти область определения функции 2) Найти производную функции 3) Решить уравнение $f'(x)=0$, найти критические точки функции 4) Разбить **область определения функции** на промежутки с помощью критических точек и определить **знак производной** в каждом из промежутков 5) Если $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) на промежутке, то функция возрастает (убывает) на нем. Выписать промежутки возрастания и убывания функции.	**Исследовать на монотонность функцию** $f(x)=x^3-3x^2$ Решение: 1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$ 2) $f'(x)=3x^2-6x$ 3) $f'(x)=0;\ 3x^2-6x=0$; 3x(x-2)=0; x=0 или x=2 4)  5) При $x\in(-\infty;0]$ и $x\in[2;+\infty)$ функция возрастает, при $x\in[0;2]$ функция убывает
Алгоритм исследования на точки экстремума (экстремумы) 1) Найти область определения функции 2) Найти производную функции 3) Решить уравнение $f'(x)=0$, найти критические точки функции 4) Разбить **область определения функции** на промежутки с помощью критических точек и определить **знак производной** в каждом из промежутков 5) Если $f'(x)$ меняет знак с + на – (с – на +) при переходе через критическую точку, то эта точка является точкой максимума (минимума) 6) При необходимости найти значения функции в точках экстремума – экстремумы.	**Исследовать на экстремумы функцию** $f(x)=x^3-3x^2$ Решение: 1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$ 2) $f'(x)=3x^2-6x$ 3) $f'(x)=0;\ 3x^2-6x=0$; 3x(x-2)=0; x=0 или x=2 4)  5) x=0 – точка максимума, x=2 – точка минимума 6) $f(0)=0^3-3\cdot0^2=0$ - максимум; $f(2)=2^3-3\cdot2^2=-4$ - минимум.
Алгоритм исследования на промежутки выпуклости (вогнутости) и перегиб 1) Найти область определения функции 2) Найти производную функции, вторую производную 3) Решить уравнение $f''(x)=0$, найти критические точки функции (на перегиб) 4) Разбить **область определения функции** на промежутки с помощью найденных точек и определить **знак второй производной** в каждом из промежутков 5) Если $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$) на промежутке, то график функции вогнутый (выпуклый) на нем.	**Исследовать на промежутки выпуклости (вогнутости) и перегиб функцию** $f(x)=x^3-3x^2$ Решение: 1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$ 2) $f'(x)=3x^2-6x$; $f''(x)=6x-6$ 3) $f''(x)=0;\ 6x-6=0$; x=1 4)  5) при $x\in(-\infty;1]$ график выпуклый, при $x\in[1;+\infty)$ - вогнутый 6) x=1 – абсцисса точки перегиба;

Выписать промежутки вогнутости и выпуклости функции 6) Если $f''(x)$ меняет знак при переходе через найденные точки, то они являются абсциссами точек перегиба. Выписать абсциссы точек перегиба и при необходимости найти ординаты этих точек.	$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -2$ - ордината точки перегиба

Тест для самоконтроля по I разделу

1. Выберите верное утверждение:

   а) $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to \Delta x} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$; б) $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$;

   в) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$; г) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta f(x_0)}$.

2. Производная функции $y = \ln(x^2 - 3)$ равна:

   а) $\dfrac{2x}{x^2 - 3}$; б) $\dfrac{1}{x^2 - 3}$; в) $\dfrac{1}{x}$; г) $\dfrac{1}{x}\left(x^2 - 3\right)$.

3. Производная функции $y = 3^{\sin x - 4x}$ равна:

   а) $3^x \cdot \ln(\cos x - 4)$; б) $3^{\sin x - 4x} \cdot \ln 3 \cdot (\cos x - 4)$;

   в) $3^x \cdot \ln 3 \cdot (\cos x - 4)$; г) $3^{\cos x - 4} \cdot \ln 3$.

4. Значение производной функции $y = x^2 e^x$ в точке $x_0 = 1$ равно:

   а) 1; б) 0; в) $3e$; г) e.

5. Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ равен:

   а) 1; б) 2; в) $\dfrac{1}{2}$; г) –2.

6. Уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - x + 1$ в точке $x = 1$ имеет вид:

   а) $y = 2x - 1$; б) $y = -x + 3$; в) $y = 2x - 3$; г) $y = -2x + 1$.

7. Производная второго порядка функции $y = x \ln x$ равна:

   а) $\ln x$; б) $-\dfrac{1}{x^2}$; в) 1; г) $\dfrac{1}{x}$.

8. Если производная функции f равна $f' = x^2 - 5x + 6$, то на отрезке [1; 2] эта функция:

   а) постоянна; б) возрастает; в) убывает; г) невозможно определить.

9. В точке экстремума:

   а) первая производная равна 0;

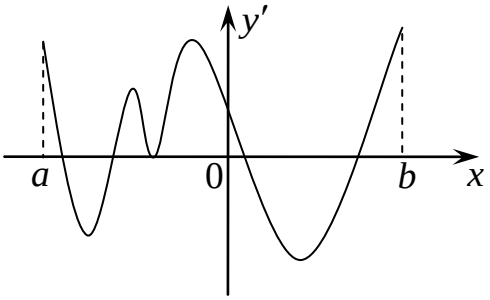
   б) первая производная не существует;

в) первая производная равна 0 или не существует;
г) первая производная может принимать любое значение.

10. Минимум функции $y = \frac{x^3}{3} - x$ равен:

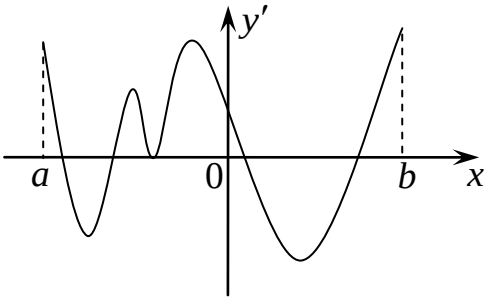
а) $-\frac{2}{3}$; б) 0; в) $\frac{2}{3}$; г) 1.

11. На рисунке изображен график производной функции, определенной на промежутке (a; b):



Число промежутков убывания функции $y = f(x)$ равно:
а) 2; б) 3; в) более 3; г) менее 2.

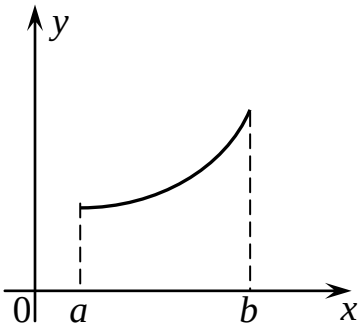
12. На рисунке изображен график производной функции, определенной на промежутке (a; b):



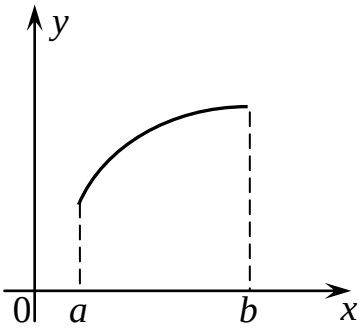
Число точек минимума функции $y = f(x)$ равно
а) 2; б) 3; в) более 3; г) менее 2.

13. График какой функции на отрезке [a; b] одновременно удовлетворяет трем условиям $y > 0$, $y' < 0$, $y'' > 0$?

а)

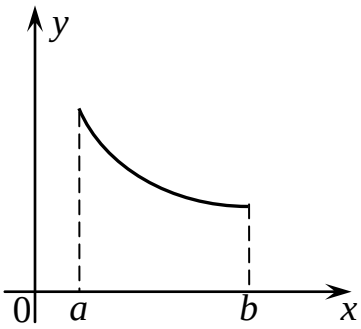


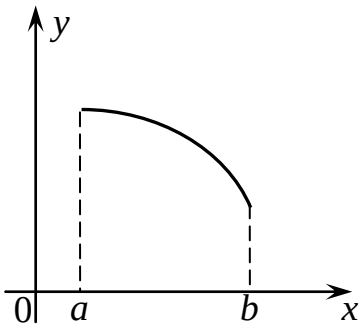
б)



в)

г)





14. Если функция выпукла вверх, то ее график:
а) расположен не выше любой касательной, проведенной к графику функции;
б) расположен не ниже любой касательной, проведенной к графику функции;
в) может пересечь некоторую касательную, проведенную к графику функции;
г) расположен не ниже любой прямой, параллельной некоторой касательной, проведенной к графику функции.

Ответы

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Верный ответ	в)	а)	б)	в)	б)	а)	г)	б)	в)	а)	а)	а)	в)	а)

Раздел II. Интегральное исчисление

Неопределенный интеграл

Задача восстановления функции по её известной производной является одной из главных задач интегрального исчисления – очень важного раздела математического анализа. Как мы увидим ниже, эта задача значительно сложнее основной задачи дифференциального исчисления о нахождении производной заданной функции.

В дальнейшем промежутки (ограниченные и неограниченные) будем обозначать буквами I, J и т.п.

Определение. Функция *F* называется *первообразной (для) функции f на промежутке I*, если в любой точке $x \epsilon I$ существует её производная $F'(x) = f(x)$.

Название «первообразная» связано с тем, что функция *F* является *прообразом* функции *f* при операции дифференцирования (нахождения производной).

Пример. Функция sin–первообразная функции $\cos$ на промежутке $(-\infty, +\infty)$ (и на любом другом промежутке), т.к. для любого $x \epsilon (-\infty, +\infty)$ существует $sin' x = \cos x$.

Теорема (о структуре множества всех первообразных). *Если F- какая -либо первообразная функции f на промежутке I, то совокупность всех первообразных функции f на промежутке I можно записать в виде F(x)+C.*

Определение. Пусть у функции *f* на промежутке *I* существует первообразная. Тогда совокупность всех первообразных функции *f* на промежутке *I* называют *неопределённым интегралом функции f* и обозначают через $\int f(x)dx$ (читают: "интеграл $f(x)dx$").

Символ $\int$ называют *знаком интеграла*, $f(x)$*-подынтегральной функцией, x - переменной интегрирования.*

Таким образом, $\int f(x)dx = F(x) + C$, где F- какая-либо конкретная первообразная функции f на промежутке I.

Операцию нахождения неопределённого интеграла функции называют *неопределённым интегрированием*, а символ C *-постоянной интегрирования*.

Свойства неопределённого интеграла

1)Если F- первообразная функции f на промежутке I, то для любого $k \in \boldsymbol{R}$ *справедливо равенство*

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot F(x) + C.$$

2) Если F и G - первообразные функций f и g соответственно на промежутке I, то справедливо равенство

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = F(x) + G(x) + C.$$

Таблица основных интегралов

1) $\int dx = x + C$

2) $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

5) $\int e^x dx = e^x + C$

6) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

7) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

10) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

11) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\beta}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\beta}\right| + C$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

14) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

Интегрирование сложной функции с линейной внутренностью

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$$

Метод интегрирования подстановкой $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$

Метод интегрирования «по частям» $\int udv = uv - \int vdu$

Определенный интеграл

Понятие определённого интеграла является одним из самых важнейших и наиболее плодотворных понятий математического анализа и математики в целом. К возникновению этого понятия привёл многочисленный ряд задач физики, техники, геометрии, естествознания и других наук. Мы рассмотрим экономическую задачу из этого ряда.

Экономический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y = f(t)$ выражает предельную производительность труда. Найдем объем продукции, произведенной за промежуток времени от T_1 до T_2.

Разобьем отрезок времени $[T_1; T_2]$ на промежутки моментами времени $T_1 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T_2$ так, чтобы в течение i-го промежутка времени $[t_{i-1}; t_i]$ производительность можно было считать постоянной и равной $f(\xi_i)$, где ξ_i — произвольный момент времени в i-м промежутке $[t_{i-1}; t_i]$. Тогда объем продукции Q_i, произведенной за промежуток времени $[t_{i-1}; t_i]$, приближенно может быть вычислен по формуле:

$$Q_i \approx f(\xi_i)\,\Delta t_i\text{, где } \Delta t_i = t\text{i} - t_{i-1},\ i = 1, 2, ..., n.$$

Тогда объем всей продукции Q приближенно можно вычислить:

$$Q \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta t_i\ .$$

Это вычисление тем точнее, чем меньше промежутки Δt_i, поэтому имеем

$$Q = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta t_i\ .$$

Последний предел согласно определению определенного интеграла есть определенный интеграл от функции $f(t)$ на отрезке $[T_1; T_2]$:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} f(t)dt\,.$$

Таким образом, если $f(t)$ — *производительность труда в момент времени t, то объем выпускаемой продукции за промежуток времени* $[T_1; T_2]$ *равен* $Q = \int_{T_1}^{T_2} f(t)dt$.

Аналогично определенный интеграл используется для нахождения издержек, прибыли, если известны соответственно функции предельных издержек, предельной прибыли и т. д.

В общем случае, если y=f(x) - интегрируемая на отрезке [a,b] функция, то **определенный интеграл - это число** $\int_a^b f(x)dx$

Число a называется *нижним*, а число b-*верхним пределом интегрирования (интеграла)*, а отрезок $[a,b]$ называется *отрезком интегрирования*.

Для вычисления определенного интеграла используют формулу Ньютона-Лейбница, которая связывает определенный интеграл с понятием первообразной:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Очевидно, что интеграл по отрезку $[a,b]$ зависит только от функции f и не зависит от обозначения её переменной, т.е. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = ...$.

Основные свойства:

1) Если функция f интегрируема по отрезку $[a,b]$, то при любом c∈**R** функция c · f также интегрируема поотрезку $[a,b]$, причём верно равенство $\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx$

2)Если функции f и g интегрируемы по отрезку $[a,b]$, то функция $f+g$ также интегрируема по отрезку $[a,b]$, причём верно равенство $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Методы интегрирования:

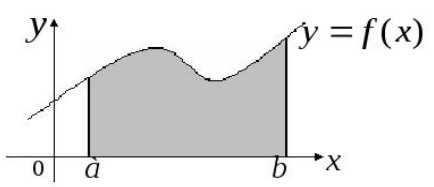
1) Непосредственное (с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции, таблицы интегралов и формулы Ньютона-Лейбница)

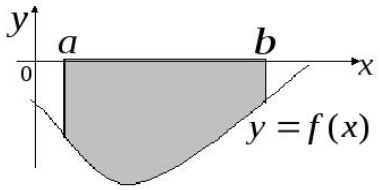
2) Метод интегрирования подстановкой: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$

3) Метод интегрирования по частям: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

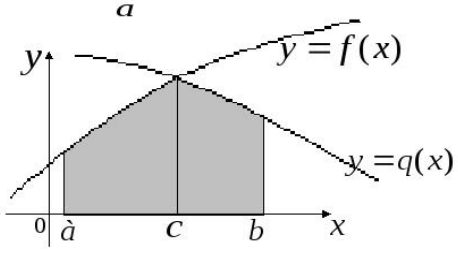
Некоторые приложения определенного интеграла

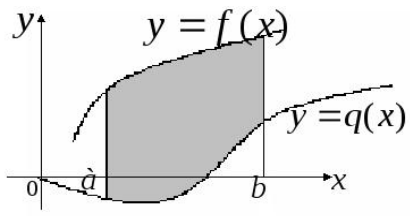
1. К вычислению площади криволинейной трапеции и плоских фигур:





$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad S = -\int_a^b f(x)dx$$





$$S = \int_a^{\tilde{n}} f(x)dx + \int_{\tilde{n}}^b q(x)dx \qquad S = \int_a^b (f(x) - q(x))dx$$

2. Рассмотрим пример экономической задачи. Найдите объем продукции, выпущенный за 5 дней при восьмичасовом рабочем дне, если производительность задана формулой $f(t) = -0{,}12t^2 + 0{,}8t + 5$.

Решение. Найдем сначала объем продукции, выпущенной за день:

$$Q = \int_0^8 \left(-0{,}12t^2 + 0{,}8t + 5\right)dt = \left(-0{,}04t^3 + 0{,}4t^2 + 5t\right)\Big|_0^8 =$$

$$= -0{,}04 \cdot 8^3 + 0{,}4 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 = 45{,}12.$$

Тогда объем продукции, выпущенной за пять дней, равен 5 · Q = 5 · 45,12 = 225,6.
Ответ: 225,6.

Тест для самоконтроля по II разделу:

1. Первообразная функции $f(x)$ — это:
   а) функция $F(x)$, равная производной функции $f(x)$;
   б) множество производных функции $f(x)$;
   в) функция $F(x)$, производная которой равна функции $f(x)$;
   г) функция, отличающаяся от $f(x)$ на постоянное число.

2. Неопределенный интеграл — это:
   а) неопределенная функция;
   б) неопределенное число;
   в) некоторая функция;
   г) некоторое множество функций.

3. Неопределенный интеграл не обладает свойством:
   а) $\int \frac{1}{c} f(x)dx = \frac{1}{c}\int f(x)dx$;
   б) $\int \left(cf(x) + g(x)\right)dx = c\int f(x)dx + \int g(x)dx$;
   в) $\int \frac{1}{f(x)}dx = \frac{1}{\int f(x)dx}$;
   г) $\int \left(f(x) - \frac{1}{c}g(x)\right)dx = \int f(x)dx - \frac{1}{c}\int g(x)dx$.

4. Формула интегрирования по частям имеет вид:
   а) $\int udv = uv - \int vdu$;
   б) $\int udv = uv + \int vdu$;
   в) $\int udv = uv - \int uvdx$;
   г) $\int udv = \int vdu - uv$.

5. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^3}$ равен:
   а) $\ln\left|x^3\right| + C$;
   б) $\frac{-2}{x^2} + C$;

в) $\frac{-3}{x^4}+C$;

г) $\frac{-1}{2x^2}+C$.

6. Неопределенный интеграл $\int x^4 e^{x^5} dx$ равен:

а) $\frac{1}{5}e^{x^5}+C$; б) $\frac{1}{6}e^{x^6}+C$;

в) $\frac{e^{x^6}}{x^5}+C$; г) $\frac{1}{5}x^5 e^{x^5}+C$.

7. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{1-3x}$ равен:

а) $-3\ln|1-3x|+C$;

б) $\ln|1-3x|+C$;

в) $-\frac{1}{3}\ln|1-3x|+C$;

г) $-3(1-3x)^{-2}+C$.

8. Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен:

а) площади фигуры, образованной графиком функции $y = f(x)$;

б) $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$, где $F(x)$ — производная функции $f(x)$;

в) $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$, где $F(a)$, $F(b)$ — значения функции $y = f(x)$;

г) $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$, где $F(x)$ — некоторая первообразная для функции $y = f(x)$.

9. Определенный интеграл обладает свойством:

а) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_b^a f(x)dx$;

б) $\int_a^b f^2(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$;

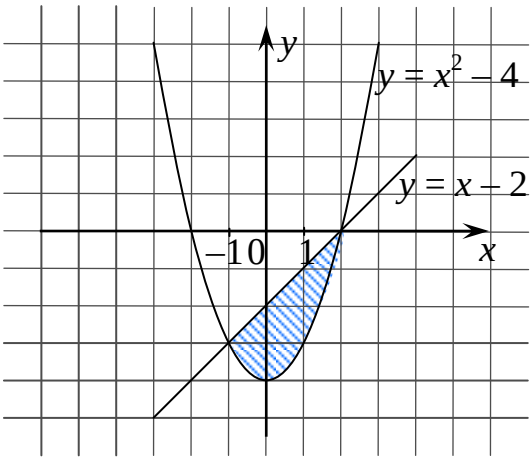
в) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $a < c < b$;

г) $\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$.

10. Определенный интеграл $\int_1^4 \left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ равен:

а) $19\frac{2}{3}$; б) 19; в) 15; г) $15\frac{2}{3}$.

11. Площадь фигуры, изображенной на рисунке,



равна:

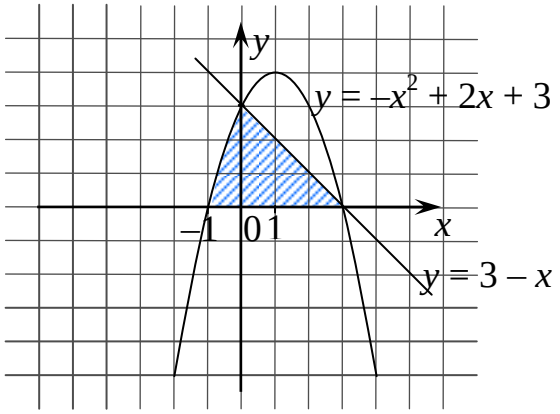
а) $\int_{-1}^{2} \left(\left(x^2 - 4\right) - \left(x - 2\right)\right)dx$;

б) $\int_{-1}^{2} \left(\left(x - 2\right) - \left(x^2 - 4\right)\right)dx$;

в) $\int_{-2}^{2} \left(\left(x - 2\right) - \left(x^2 - 4\right)\right)dx$;

г) $\int_{-1}^{2} \left(\left(x - 2\right) + \left(x^2 - 4\right)\right)dx$.

12. Площадь фигуры, изображенной на рисунке,



равна:

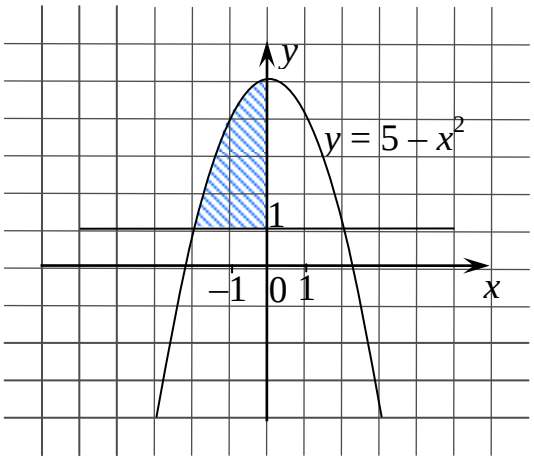
а) $\int_{-1}^{3}\left(\left(-x^2+2x+3\right)-\left(3-x\right)\right)dx$;

б) $\int_{0}^{3}\left(\left(-x^2+2x+3\right)+\left(3-x\right)\right)dx$;

в) $\int_{-1}^{0}\left(-x^2+2x+3\right)dx-\int_{0}^{3}\left(3-x\right)dx$;

г) $\int_{-1}^{0}\left(-x^2+2x+3\right)dx+\int_{0}^{3}\left(3-x\right)dx$.

13. Площадь фигуры, изображенной на рисунке,



равна:

а) $\frac{16}{3}$; б) $\frac{22}{3}$; в) $\frac{28}{3}$; г) $-\frac{16}{3}$.

Ответы

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Верный ответ	в)	г)	в)	а)	г)	а)	в)	г)	в)	б)	б)	г)	а)

4. Варианты контрольной работы:

Для выполнения КР необходимо подставить в задания параметры a, b и c в соответствии с номером студента по списку (номером варианта).

1. Найдите производную функции (в примерах Б-Е сложная функция):

А) $f(x) = ax^3 + bx - c$	В) $f(x) = e^{ax+b}$	Д) $f(x) = \arcsin(bx)$
Б) $f(x) = \sin(ax + b)$	Г) $f(x) = \ln(bx + c)$	Е) $f(x) = \mathrm{arctg}(cx)$

2. Найдите производную произведения и частного:

А) $f(x) = (ax^2 + c)\mathrm{tg}\,x$	Б) $f(x) = \frac{cx-a}{x+b}$

3. Для функции из задания 1А найдите вторую производную.
4. Для функции из задания 1В запишите дифференциал.
5. Найдите точки экстремума функции $f(x) = ax^3 - bx + c$.
6. Найдите неопределенные интегралы от функций:

А) $f(x) = ax^3 + bx - c$	В) $f(x) = e^{ax+b}$	Д) $f(x) = \frac{1}{x^2+b^2}$
Б) $f(x) = cos(ax - b)$	Г) $f(x) = \frac{a}{bx+c}$	Е) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$

7. Найдите определенный интеграл на [0, 1] от функций:

а) $f(x) = ax^2 - c$	б) $f(x) = \frac{b}{ax+c}$	в) $f(x) = \frac{1}{x^2-a^2}$

8. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью Ox, прямыми x=0, x=1 и графиком функции $f(x) = ax^2 + b$.
9. Найдите неопределенный интеграл методом подстановки $\int (ax^2 + b)^c x dx$.
10. Найдите определенный интеграл методом подстановки $\int_0^1 e^{ax^2+c} x dx$.

№ студента по списку и номер варианта	a	b	c
демонстрационный	**11**	**2**	**7**
1.	2	5	10
2.	3	6	9
3.	4	7	8
4.	5	8	7
5.	6	9	6
6.	7	10	5
7.	8	2	4
8.	9	3	3
9.	2	4	2
10.	3	5	10
11.	4	6	9
12.	5	7	8
13.	6	8	7

14.	7	9	6
15.	8	10	5
16.	9	2	4
17.	2	3	3
18.	3	4	2
19.	4	5	10
20.	5	6	9
21.	6	7	8
22.	7	8	7
23.	8	9	6
24.	9	10	5
25.	2	3	4
26.	3	4	3
27.	4	5	2

Решение демонстрационного варианта

① А) $f(x) = 11x^3 + 2x - 7$

$f'(x) = 11 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 1 - 0 = 33x^2 + 2$

Б) $f(x) = \sin(11x + 2)$ $\boxed{(\sin u)' = \cos u \cdot u'}$

$f'(x) = \cos(11x+2) \cdot (11x+2)' = \cos(11x+2) \cdot 11 = 11\cos(11x+2)$

В) $f(x) = e^{11x+2}$ $\boxed{(e^u)' = e^u \cdot u'}$

$f'(x) = e^{11x+2} \cdot (11x+2)' = e^{11x+2} \cdot 11 = 11e^{11x+2}$

Г) $f(x) = \ln(2x+7)$ $\boxed{(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'}$

$f'(x) = \frac{1}{2x+7} \cdot (2x+7)' = \frac{1}{2x+7} \cdot 2 = \frac{2}{2x+7}$

Д) $f(x) = \arcsin(2x)$ $\boxed{(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'}$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot (2x)' = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

Е) $f(x) = \operatorname{arctg}(7x)$ $\boxed{(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'}$

$f'(x) = \frac{1}{1+(7x)^2} \cdot (7x)' = \frac{1}{1+49x^2} \cdot 7 = \frac{7}{1+49x^2}$

② А) $f(x) = \underbrace{(11x^2+7)}_{u} \underbrace{\operatorname{tg} x}_{v}$ $\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$

$f'(x) = (11x^2+7)' \operatorname{tg} x + (11x^2+7) \cdot (\operatorname{tg} x)' =$

$= (22x+0)\operatorname{tg} x + (11x^2+7) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 22x \operatorname{tg} x + \frac{11x^2+7}{\cos^2 x}$

Б) $f(x) = \frac{7x-11}{x+2}$ $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$

$f'(x) = \frac{(7x-11)'(x+2) - (7x-11)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{7(x+2) - (7x-11) \cdot 1}{(x+2)^2} =$

$= \frac{\cancel{7x} + 14 - \cancel{7x} + 11}{(x+2)^2} = \frac{25}{(x+2)^2}$

③ $f''(x) = (f'(x))'$

$f'(x) = 33x^2 + 2$

$f''(x) = (33x^2+2)' = 66x + 0 = 66x$

④ $dy = f'(x)\,dx$; $f'(x) = 11e^{11x+2}$

$dy = 11e^{11x+2}\,dx.$

⑤. $f(x) = 11x^3 - 2x + 7$

$D(f) = (-\infty; +\infty)$

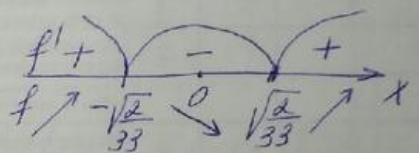
$f'(x) = 33x^2 - 2$

$f'(x) = 0, \quad 33x^2 - 2 = 0$

$33x^2 = 2$

$x^2 = \frac{2}{33}$

$x = \pm\sqrt{\frac{2}{33}}$



Ответ: $x_{max} = -\sqrt{\frac{2}{33}}$; $x_{min} = \sqrt{\frac{2}{33}}$

⑥ А) $\int (11x^3 + 2x - 7)\,dx = 11 \cdot \frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 7x + C =$

$= \frac{11}{4}x^4 + x^2 - 7x + C$

Б). $\int \cos(11x - 2)\,dx = [k = 11] = \frac{1}{11} \cdot \sin(11x - 2) + C$

В) $\int e^{11x+2}\,dx = [k = 11] = \frac{1}{11}e^{11x+2} + C$

Г) $\int \frac{11}{2x+7}\,dx = 11\int \frac{dx}{2x+7} = [k = 2] = 11 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln|2x+7| + C =$

$= \frac{11}{2}\ln|2x+7| + C$

Д) $f(x) = \frac{1}{x^2+6^2} = \frac{1}{x^2+2^2}$; $\int \frac{dx}{x^2+2^2} = [a = 2] = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C}$$

Е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+11}} = \ln|x+\sqrt{x^2+11}| + C.$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\beta}} = \ln|x+\sqrt{x^2+\beta}| + C}$$

(7) А) $\int_0^1 (11x^2-7)\,dx = \left(11\frac{x^3}{3} - 7x\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{11\cdot 1^3}{3} - 7\cdot 1\right) - 0 = \frac{11}{3} - 7 =$

$= \frac{11-21}{3} = -\frac{10}{3}$

Б). $\int_0^1 \frac{2}{11x+7}\,dx = 2\int_0^1 \frac{dx}{11x+7} = [k=11] = \frac{2}{11}\ln|11x+7|\Big|_0^1 =$

$= \frac{2}{11}\left(\ln(11\cdot 1+7) - \ln 7\right) = \frac{2}{11}\left(\ln 18 - \ln 7\right) = \frac{2}{11}\ln\frac{18}{7}.$

В) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-11^2} =$ $\boxed{\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|}$

$= [a=11] = \frac{1}{2\cdot 11}\ln\left|\frac{x-11}{x+11}\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{22}\left(\ln\left|\frac{1-11}{1+11}\right| - \ln\left|\frac{0-11}{0+11}\right|\right) =$

$= \frac{1}{22}\left(\ln\frac{11}{12} - \underbrace{\ln 1}_{0}\right) = \frac{1}{22}\ln\frac{11}{12}$

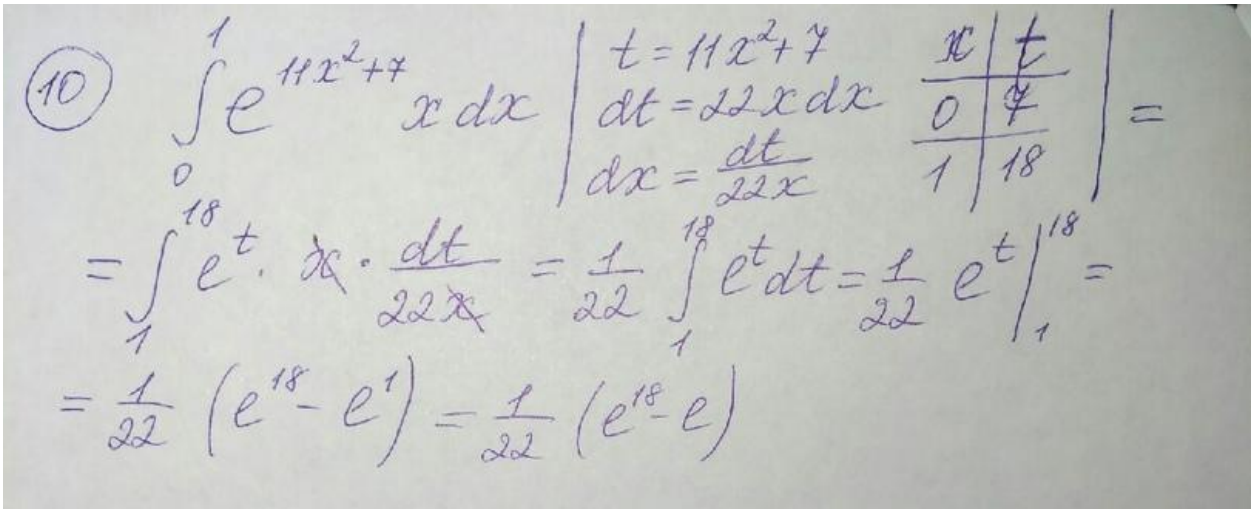
(8) $S = \int_a^b f(x)\,dx$

$S = \int_0^1 (11x^2+2)\,dx = \left(11\cdot\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_0^1 = \left(11\cdot\frac{1^3}{3} + 2\cdot 1\right) - 0 =$

$= \frac{11}{3} + 2 = \frac{11}{3} + \frac{6}{3} = \frac{17}{3}$ Ответ: $\frac{17}{3}$

(9) $\int (11x^2+2)^7 x\,dx = \left|\begin{array}{l} t = 11x^2+2 \\ dt = 22x\,dx \\ dx = \frac{dt}{22x} \end{array}\right| = \int t^7 \cdot x \cdot \frac{dt}{22x} =$

$= \frac{1}{22}\int t^7 dt = \frac{1}{22}\cdot\frac{t^8}{8} + C = \frac{1}{176}(11x^2+2)^8 + C$



(10) $\int_0^1 e^{11x^2+7} x\,dx$ $\left| \begin{array}{l} t = 11x^2+7 \\ dt = 22x\,dx \\ dx = \frac{dt}{22x} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 7 \\ \hline 1 & 18 \end{array} \right| =$

$= \int_1^{18} e^t \cdot \cancel{x} \cdot \frac{dt}{22\cancel{x}} = \frac{1}{22} \int_1^{18} e^t dt = \frac{1}{22} e^t \Big|_1^{18} =$

$= \frac{1}{22}\left(e^{18} - e^1\right) = \frac{1}{22}\left(e^{18} - e\right)$

Перечень рекомендуемых учебных изданий

Основные источники:

1. Башмаков, М. И., Математика : учебник / М. И. Башмаков. — Москва : КноРус, 2024. — 394 с. — ISBN 978-5-406-12450-5. — URL: https://book.ru/book/951555. — Текст : электронный.
2. Башмаков, М. И., Математика. Практикум : учебно-практическое пособие / М. И. Башмаков, С. Б. Энтина. — Москва : КноРус, 2023. — 294 с. — ISBN 978-5-406-10588-7. — URL: https://book.ru/book/945228. — Текст : электронный.
3. Гончаренко, В. М., Элементы высшей математики. : учебник / В. М. Гончаренко, Л. В. Липагина, А. А. Рылов. — Москва : КноРус, 2023. — 363 с. — ISBN 978-5-406-11529-9. — URL: https://book.ru/book/949361. — Текст : электронный.
4. Гулиян, Б. Ш., Элементы высшей математики : учебное пособие / Б. Ш. Гулиян, Г. Б. Гулиян. — Москва : КноРус, 2023. — 436 с. — ISBN 978-5-406-11415-5. — URL: https://book.ru/book/949350. — Текст : электронный.
5. Дзюба, Т. С., Математика. Практикум : учебное пособие / Т. С. Дзюба. — Москва : Русайнс, 2023. — 202 с. — ISBN 978-5-466-03198-0. — URL: https://book.ru/book/949694. — Текст : электронный.